Mikropodstawy dla znormalizowanej funkcji produkcji CES z postępem technicznym nakierowanym na poszczególne czynniki produkcji

Jakub Growiec[1,2]

[1]Narodowy Bank Polski
[2]Szkoła Główna Handlowa

Seminarium NBP, 21 września 2011

Plan prezentacji

Geneza badania

- Jones (2005) oraz Growiec (2008 IJET, EL) przeanalizowali model endogenicznego wyboru technologii przez firmy, dostarczający mikropodstaw dla zagregowanej funkcji produkcji **Cobba–Douglasa** (Jones) oraz **CES**. Kluczowe elementy tego modelu: zbiór możliwości technologicznych oraz lokalna funkcja produkcji (LFP).

Geneza badania

- Jones (2005) oraz Growiec (2008 IJET, EL) przeanalizowali model endogenicznego wyboru technologii przez firmy, dostarczający mikropodstaw dla zagregowanej funkcji produkcji **Cobba–Douglasa** (Jones) oraz **CES**. Kluczowe elementy tego modelu: zbiór możliwości technologicznych oraz lokalna funkcja produkcji (LFP).

- Niniejszy artykuł rozważa trzy ważne rozszerzenia tych modeli:
  - wykorzystujemy tu znormalizowane funkcje produkcji CES (La Grandville, 1989; Klump i La Grandville, 2000). Dzięki normalizacji możliwe jest powiązanie parametrów rozkładów produktywności czynników oraz LFP z parametrami zagregowanej funkcji produkcji;

Geneza badania

- Jones (2005) oraz Growiec (2008 IJET, EL) przeanalizowali model endogenicznego wyboru technologii przez firmy, dostarczający mikropodstaw dla zagregowanej funkcji produkcji **Cobba–Douglasa** (Jones) oraz **CES**. Kluczowe elementy tego modelu: zbiór możliwości technologicznych oraz lokalna funkcja produkcji (LFP).
- Niniejszy artykuł rozważa trzy ważne rozszerzenia tych modeli:
  - wykorzystujemy tu znormalizowane funkcje produkcji CES (La Grandville, 1989; Klump i La Grandville, 2000). Dzięki normalizacji możliwe jest powiązanie parametrów rozkładów produktywności czynników oraz LFP z parametrami zagregowanej funkcji produkcji;
  - uchylamy założenie **proporcjonalnego** rozszerzania zbioru możliwości technologicznych dzięki B+R (obecnego w poprzedzającej literaturze). Mamy więc *factor-augmenting technical change* (por. np. Li, 2001; Acemoglu, 2003);

Geneza badania

- Jones (2005) oraz Growiec (2008 IJET, EL) przeanalizowali model endogenicznego wyboru technologii przez firmy, dostarczający mikropodstaw dla zagregowanej funkcji produkcji **Cobba–Douglasa** (Jones) oraz **CES**. Kluczowe elementy tego modelu: zbiór możliwości technologicznych oraz lokalna funkcja produkcji (LFP).

- Niniejszy artykuł rozważa trzy ważne rozszerzenia tych modeli:
  - wykorzystujemy tu znormalizowane funkcje produkcji CES (La Grandville, 1989; Klump i La Grandville, 2000). Dzięki normalizacji możliwe jest powiązanie parametrów rozkładów produktywności czynników oraz LFP z parametrami zagregowanej funkcji produkcji;
  - uchylamy założenie **proporcjonalnego** rozszerzania zbioru możliwości technologicznych dzięki B+R (obecnego w poprzedzającej literaturze). Mamy więc *factor-augmenting technical change* (por. np. Li, 2001; Acemoglu, 2003);
  - rozszerzamy też model na przypadek *n* czynników wytwórczych (w załączniku).

Geneza badania

- Jones (2005) oraz Growiec (2008 IJET, EL) przeanalizowali model endogenicznego wyboru technologii przez firmy, dostarczający mikropodstaw dla zagregowanej funkcji produkcji **Cobba–Douglasa** (Jones) oraz **CES**. Kluczowe elementy tego modelu: zbiór możliwości technologicznych oraz lokalna funkcja produkcji (LFP).

- Niniejszy artykuł rozważa trzy ważne rozszerzenia tych modeli:
  - wykorzystujemy tu znormalizowane funkcje produkcji CES (La Grandville, 1989; Klump i La Grandville, 2000). Dzięki normalizacji możliwe jest powiązanie parametrów rozkładów produktywności czynników oraz LFP z parametrami zagregowanej funkcji produkcji;
  - uchylamy założenie **proporcjonalnego** rozszerzania zbioru możliwości technologicznych dzięki B+R (obecnego w poprzedzającej literaturze). Mamy więc *factor-augmenting technical change* (por. np. Li, 2001; Acemoglu, 2003);
  - rozszerzamy też model na przypadek n czynników wytwórczych (w załączniku).

- Przedstawiony zostaje teoretyczny argument uzasadniający założenie niezależnych rozkładów Weibulla jednostkowych produktywności kapitału i pracy (Growiec, 2008, EL).

Wyniki badania

- **Normalizacja** względem początkowych nakładów K_0, L_0, produktu Y_0 oraz początkowego udziału wynagrodzenia kapitału w produkcie π_0 może zostać utrzymana równocześnie na poziomie lokalnym i zagregowanym, wydatnie ułatwiając interpretację parametrów zagregowanej funkcji produkcji.

Wyniki badania

- **Normalizacja** względem początkowych nakładów K_0, L_0, produktu Y_0 oraz początkowego udziału wynagrodzenia kapitału w produkcie π_0 może zostać utrzymana równocześnie na poziomie lokalnym i zagregowanym, wydatnie ułatwiając interpretację parametrów zagregowanej funkcji produkcji.
- Zgodnie z wynikami pracy Growiec (2008, EL): jeśli technologie zwiększające jednostkową produktywność kapitału i pracy mają niezależne rozkłady Weibulla, to zagregowana funkcja produkcji jest **funkcją CES**. Zgodnie z wynikami Jonesa (2005), jeśli mają one niezależne rozkłady Pareto to zagregowana funkcja produkcji jest **funkcją Cobba–Douglasa**.

Wyniki badania

- **Normalizacja** względem początkowych nakładów K_0, L_0, produktu Y_0 oraz początkowego udziału wynagrodzenia kapitału w produkcie π_0 może zostać utrzymana równocześnie na poziomie lokalnym i zagregowanym, wydatnie ułatwiając interpretację parametrów zagregowanej funkcji produkcji.
- Zgodnie z wynikami pracy Growiec (2008, EL): jeśli technologie zwiększające jednostkową produktywność kapitału i pracy mają niezależne rozkłady Weibulla, to zagregowana funkcja produkcji jest **funkcją CES**. Zgodnie z wynikami Jonesa (2005), jeśli mają one niezależne rozkłady Pareto to zagregowana funkcja produkcji jest **funkcją Cobba–Douglasa**.
- Oddzielając wybór technologii przez firmy od wyników B+R, możemy wyraźnie rozgraniczyć kierunek postępu technicznego od kierunku B+R. Są to odrębne koncepcje, które można utożsamić tylko w szczególnych, nietypowych przypadkach (m.in. przypadek LATC – Acemoglu, 2003). W przypadku funkcji Cobba–Douglasa kierunek B+R jest bez znaczenia.

Wyniki badania (cd.)

Uzasadnienie dla zastosowania **rozkładów Weibulla**:

- jeśli technologie w swej istocie złożone i składają się z n komplementarnych elementów, wówczas przy dość ogólnych założeniach, dla $n \to \infty$ powinny mieć one rozkład Weibulla, ze względu na twierdzenie o wartościach ekstremalnych (Fisher–Tippett–Gnedenko);
- rozkład Weibulla jest min–stabilny.

Wyniki badania (cd.)

Uzasadnienie dla zastosowania **rozkładów Weibulla**:

- jeśli technologie w swej istocie złożone i składają się z n komplementarnych elementów, wówczas przy dość ogólnych założeniach, dla $n \to \infty$ powinny mieć one rozkład Weibulla, ze względu na twierdzenie o wartościach ekstremalnych (Fisher–Tippett–Gnedenko);
- rozkład Weibulla jest min–stabilny.

Koncepcja komplementarności poszczególnych składowych w złożonych technologiach:

- Kremer (1993) – “O–ring theory”,
- Blanchard i Kremer (1997), Jones (2010), itd.

Wyniki badania (cd.)

Uzasadnienie dla zastosowania **rozkładów Weibulla**:

- jeśli technologie w swej istocie złożone i składają się z n komplementarnych elementów, wówczas przy dość ogólnych założeniach, dla $n \to \infty$ powinny mieć one rozkład Weibulla, ze względu na twierdzenie o wartościach ekstremalnych (Fisher–Tippett–Gnedenko);
- rozkład Weibulla jest min–stabilny.

Koncepcja komplementarności poszczególnych składowych w złożonych technologiach:

- Kremer (1993) – “O–ring theory”,
- Blanchard i Kremer (1997), Jones (2010), itd.

Załącznik: rozszerzenie modelu na przypadek n czynników wytwórczych.

Plan prezentacji

Założenia modelu – lokalna funkcja produkcji

Założenie

Lokalna funkcja produkcji (LFP) przyjmuje postać znormalizowanej funkcji CES:

$$Y = Y_0 \left(\pi_0 \left(\frac{bK}{b_0 K_0} \right)^{\theta} + (1 - \pi_0) \left(\frac{aL}{a_0 L_0} \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{1}$$

gdzie $\theta \in [-\infty, 0)$ jest parametrem substytucyjności, $\sigma_{LPF} = \frac{1}{1-\theta}$. Parametr $\pi_0 = \frac{r_0 K_0}{Y_0}$ jest udziałem wynagrodzenia kapitału w okresie t_0. LFP ma stałe korzyści skali.

Założenia modelu – granica możliwości technologicznych

Założenie

Granica możliwości technologicznych zadana jest w przestrzeni (a, b) *równością*

$$H(a,b) = \left(\frac{a}{\lambda_a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{b}{\lambda_b}\right)^{\alpha} = N, \qquad \lambda_a, \lambda_b, \alpha, N > 0. \tag{2}$$

Założenia modelu – granica możliwości technologicznych

Założenie

Granica możliwości technologicznych zadana jest w przestrzeni (a, b) *równością*

$$H(a,b) = \left(\frac{a}{\lambda_a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{b}{\lambda_b}\right)^{\alpha} = N, \qquad \lambda_a, \lambda_b, \alpha, N > 0. \tag{2}$$

Mamy:

$$H(a,b) = N \Leftrightarrow \exp\left(\left(\frac{a}{\lambda_a}\right)^{\alpha}\right) \cdot \exp\left(\left(\frac{b}{\lambda_b}\right)^{\alpha}\right) = e^{-N}.$$

Założenia modelu – granica możliwości technologicznych

Założenie

Granica możliwości technologicznych zadana jest w przestrzeni (a, b) *równością*

$$H(a,b) = \left(\frac{a}{\lambda_a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{b}{\lambda_b}\right)^{\alpha} = N, \qquad \lambda_a, \lambda_b, \alpha, N > 0. \tag{2}$$

Mamy:

$$H(a,b) = N \Leftrightarrow \exp\left(\left(\frac{a}{\lambda_a}\right)^{\alpha}\right) \cdot \exp\left(\left(\frac{b}{\lambda_b}\right)^{\alpha}\right) = e^{-N}.$$

Granicę możliwości technologicznych interpretujemy więc jako warstwicę rozkładu łącznego jednostkowych produktywności kapitału i pracy.
Uzasadnienie w dalszej części prezentacji.

Założenia modelu – statyczny problem decyzyjny firm

Założenie

W każdej chwili t, firmy wybierają parę jednostkowych produktywności czynników (a, b) optymalnie spośród konfiguracji dostępnych na granicy możliwości technologicznych:

$$\max_{a,b} \left\{ Y_0 \left(\pi_0 \left(\frac{bK}{b_0 K_0} \right)^{\theta} + (1 - \pi_0) \left(\frac{aL}{a_0 L_0} \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad p.w. \left(\frac{a}{\lambda_a} \right)^{\alpha} + \left(\frac{b}{\lambda_b} \right)^{\alpha} = N. \tag{3}$$

Optymalny wybór technologii

W chwili t_0:

$$a_0^* = (N(1-\pi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \lambda_{a0}, \qquad b_0^* = (N\pi_0)^{\frac{1}{\alpha}} \lambda_{b0}. \tag{4}$$

Optymalny wybór technologii

W chwili t_0:

$$a_0^* = (N(1-\pi_0))^{\frac{1}{\alpha}} \lambda_{a0}, \qquad b_0^* = (N\pi_0)^{\frac{1}{\alpha}} \lambda_{b0}. \tag{4}$$

W chwili $t \neq t_0$:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^* = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \left(\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a} \frac{\lambda_{a0}}{\lambda_{b0}} \frac{KL_0}{LK_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + 1 - \pi_0 \right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{b}{b_0}\right)^* = \frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \left(\pi_0 + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_a} \frac{\lambda_{a0}}{\lambda_{b0}} \frac{KL_0}{LK_0} \right)^{-\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} \right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{6}$$

Wyprowadzona zagregowana funkcja produkcji

Twierdzenie

Zagregowana funkcja produkcji przyjmuje postać znormalizowanej funkcji CES:

$$Y = Y_0 \left(\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} \right)^{\frac{\alpha-\theta}{\alpha\theta}} . \tag{7}$$

Wyprowadzona zagregowana funkcja produkcji

Twierdzenie

Zagregowana funkcja produkcji przyjmuje postać znormalizowanej funkcji CES:

$$Y = Y_0 \left(\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} \right)^{\frac{\alpha-\theta}{\alpha\theta}}. \tag{7}$$

- Parametr substytucyjności: $\rho = \frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}$.
  Elastyczność substytucji $\sigma = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\alpha-\theta}{\alpha-\theta-\alpha\theta} > 0$.
  Zauważmy, że $\rho > \theta$, a więc $\sigma > \sigma_{LPF} = \frac{1}{1-\theta}$.

Wyprowadzona zagregowana funkcja produkcji

Twierdzenie

Zagregowana funkcja produkcji przyjmuje postać znormalizowanej funkcji CES:

$$Y = Y_0 \left(\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} \right)^{\frac{\alpha-\theta}{\alpha\theta}} . \qquad (7)$$

- Parametr substytucyjności: $\rho = \frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}$.
  Elastyczność substytucji $\sigma = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\alpha-\theta}{\alpha-\theta-\alpha\theta} > 0$.
  Zauważmy, że $\rho > \theta$, a więc $\sigma > \sigma_{LPF} = \frac{1}{1-\theta}$.
- Parametr rozkładu: $\pi_0 = \frac{r_0 K_0}{Y_0}$, multiplikatywna stała to Y_0.

Wyprowadzona zagregowana funkcja produkcji

Twierdzenie

Zagregowana funkcja produkcji przyjmuje postać znormalizowanej funkcji CES:

$$Y = Y_0 \left(\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} \right)^{\frac{\alpha-\theta}{\alpha\theta}}. \tag{7}$$

- Parametr substytucyjności: $\rho = \frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}$.
  Elastyczność substytucji $\sigma = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\alpha-\theta}{\alpha-\theta-\alpha\theta} > 0$.
  Zauważmy, że $\rho > \theta$, a więc $\sigma > \sigma_{LPF} = \frac{1}{1-\theta}$.
- Parametr rozkładu: $\pi_0 = \frac{r_0 K_0}{Y_0}$, multiplikatywna stała to Y_0.
- Parametr N znika.

Wyprowadzona zagregowana funkcja produkcji

Twierdzenie

Zagregowana funkcja produkcji przyjmuje postać znormalizowanej funkcji CES:

$$Y = Y_0 \left(\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} \right)^{\frac{\alpha-\theta}{\alpha\theta}} . \tag{7}$$

- Parametr substytucyjności: $\rho = \frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}$.
  Elastyczność substytucji $\sigma = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\alpha-\theta}{\alpha-\theta-\alpha\theta} > 0$.
  Zauważmy, że $\rho > \theta$, a więc $\sigma > \sigma_{LPF} = \frac{1}{1-\theta}$.
- Parametr rozkładu: $\pi_0 = \frac{r_0 K_0}{Y_0}$, multiplikatywna stała to Y_0.
- Parametr N znika.
- Czynnik b w LFP zastępujemy λ_b, czynnik a zastępujemy λ_a.

Wynagrodzenia czynników

Wniosek

Zakładając, że czynniki produkcji są wynagradzane na poziomie ich produktu krańcowego, udziały wynagrodzenia kapitału i pracy w produkcie wynoszą odpowiednio:

$$\pi = \frac{rK}{Y} = \frac{\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}}}{\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}}}, \tag{8}$$

$$1-\pi = \frac{wL}{Y} = \frac{(1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}}}{\pi_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}} \frac{K}{K_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}} + (1-\pi_0) \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}} \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{\alpha\theta}{\alpha-\theta}}}. \tag{9}$$

Plan prezentacji

Nietypowy przypadek I: LATC

Przykład specyfikacji równań B+R (Acemoglu, 2003):

$$\dot{\lambda}_a = f_a(\ell_a)\lambda_a \quad (10)$$

$$\dot{\lambda}_b = f_b(\ell_b)\lambda_b \quad (11)$$

- ℓ_a i ℓ_b są odsetkami populacji zaangażowanej w sektorach B+R.
- f_a, f_b są gładkimi funkcjami rosnącymi.

Nietypowy przypadek I: LATC

Przykład specyfikacji równań B+R (Acemoglu, 2003):

$$\dot{\lambda}_a = f_a(\ell_a)\lambda_a \tag{10}$$

$$\dot{\lambda}_b = f_b(\ell_b)\lambda_b \tag{11}$$

- ℓ_a i ℓ_b są odsetkami populacji zaangażowanej w sektorach B+R.
- f_a, f_b są gładkimi funkcjami rosnącymi.

Gospodarka dąży wówczas do ścieżki zrównoważonego wzrostu, gdzie:

$$\hat{y} = \hat{k} = \hat{a} = \hat{\lambda}_a = f(\ell_a^*), \tag{12}$$

$$\hat{b} = \hat{\lambda}_b = 0. \tag{13}$$

Nietypowy przypadek I: LATC

Przykład specyfikacji równań B+R (Acemoglu, 2003):

$$\dot{\lambda}_a = f_a(\ell_a)\lambda_a \quad (10)$$
$$\dot{\lambda}_b = f_b(\ell_b)\lambda_b \quad (11)$$

- ℓ_a i ℓ_b są odsetkami populacji zaangażowanej w sektorach B+R.
- f_a, f_b są gładkimi funkcjami rosnącymi.

Gospodarka dąży wówczas do ścieżki zrównoważonego wzrostu, gdzie:

$$\hat{y} = \hat{k} = \hat{a} = \hat{\lambda}_a = f(\ell_a^*), \quad (12)$$
$$\hat{b} = \hat{\lambda}_b = 0. \quad (13)$$

- B+R jest neutralne w sensie Harroda (LATC, $\hat{\lambda}_b = 0$),
- postęp techniczny (technologie wybierane przez firmy) jest również neutralny w sensie Harroda ($\hat{b} = 0$),
- udziały wynagrodzenia poszczególnych czynników w produkcie są stałe i wynoszą π_0 oraz $1 - \pi_0$.

Nietypowy przypadek II: postęp techniczny neutralny w sensie Hicksa

Założenie przyjęte w pracach: Caselli i Coleman (2006), Growiec (2008 IJET).

Nietypowy przypadek II: postęp techniczny neutralny w sensie Hicksa

Założenie przyjęte w pracach: Caselli i Coleman (2006), Growiec (2008 IJET).

Przykład specyfikacji równań B+R spójny z tym założeniem ($\lambda_a/\lambda_b \equiv$const):

$$\dot{\lambda}_a = f(\ell_a, \ell_b)\lambda_a^{\alpha+1}\lambda_b^{\beta} \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}_b = f(\ell_a, \ell_b)\lambda_a^{\alpha}\lambda_b^{\beta+1} \quad (15)$$

Nietypowy przypadek II: postęp techniczny neutralny w sensie Hicksa

Założenie przyjęte w pracach: Caselli i Coleman (2006), Growiec (2008 IJET).

Przykład specyfikacji równań B+R spójny z tym założeniem ($\lambda_a/\lambda_b \equiv$const):

$$\dot{\lambda}_a = f(\ell_a, \ell_b)\lambda_a^{\alpha+1}\lambda_b^{\beta} \quad (14)$$

$$\dot{\lambda}_b = f(\ell_a, \ell_b)\lambda_a^{\alpha}\lambda_b^{\beta+1} \quad (15)$$

W długim okresie będziemy mieć $\hat{\lambda}_a = \hat{\lambda}_b = g > 0$.

Nietypowy przypadek II: postęp techniczny neutralny w sensie Hicksa

Założenie przyjęte w pracach: Caselli i Coleman (2006), Growiec (2008 IJET).

Przykład specyfikacji równań B+R spójny z tym założeniem ($\lambda_a/\lambda_b \equiv$const):

$$\dot{\lambda}_a = f(\ell_a, \ell_b)\lambda_a^{\alpha+1}\lambda_b^{\beta} \tag{14}$$

$$\dot{\lambda}_b = f(\ell_a, \ell_b)\lambda_a^{\alpha}\lambda_b^{\beta+1} \tag{15}$$

W długim okresie będziemy mieć $\hat{\lambda}_a = \hat{\lambda}_b = g > 0$.

Gdy $t \to \infty$, mamy $k \to +\infty$, a w konsekwencji:

$$\lim_{t\to\infty} \hat{y}(t) = g, \tag{16}$$

$$\lim_{t\to\infty} \hat{a}(t) = g, \tag{17}$$

$$\lim_{t\to\infty} \hat{b}(t) = g + \frac{\theta}{\alpha-\theta}\lim_{t\to\infty}\hat{k}(t) \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\hat{b}(t) \in \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha-\theta}\right)g, g\right). \tag{18}$$

Przypadek ogólny

We wszystkich pozostałych przypadkach skierowanego B+R, implikującego $\hat{\lambda}_a \neq \hat{\lambda}_b$ oraz $\hat{\lambda}_b \neq 0$ w długim okresie, mamy:

- Jeśli $\lambda_b K$ rośnie szybciej niż $\lambda_a L$, to $\hat{y}(t) \to \hat{\lambda}_a(t)$, $\hat{a}(t) \to \hat{\lambda}_a(t)$ i $\hat{b}(t) \to \hat{\lambda}_b(t) + \frac{\theta}{\alpha-\theta}\hat{k}(t)$ wraz z t. Udział wynagrodzenia kapitału spada do zera.

Przypadek ogólny

We wszystkich pozostałych przypadkach skierowanego B+R, implikującego $\hat{\lambda}_a \neq \hat{\lambda}_b$ oraz $\hat{\lambda}_b \neq 0$ w długim okresie, mamy:

- Jeśli $\lambda_b K$ rośnie szybciej niż $\lambda_a L$, to $\hat{y}(t) \to \hat{\lambda}_a(t)$, $\hat{a}(t) \to \hat{\lambda}_a(t)$ i $\hat{b}(t) \to \hat{\lambda}_b(t) + \frac{\theta}{\alpha-\theta}\hat{k}(t)$ wraz z t. Udział wynagrodzenia kapitału spada do zera.
- Jeśli $\lambda_b K$ rośnie wolniej niż $\lambda_a L$, to $\hat{y}(t) \to \hat{\lambda}_b(t) + \hat{k}(t)$, $\hat{a}(t) \to \hat{\lambda}_a(t) - \frac{\theta}{\alpha-\theta}\hat{k}(t)$ i $\hat{b}(t) \to \hat{\lambda}_b(t)$ wraz z t. Udział wynagrodzenia kapitału wzrasta do jedności.

Przypadek ogólny

We wszystkich pozostałych przypadkach skierowanego B+R, implikującego $\hat{\lambda}_a \neq \hat{\lambda}_b$ oraz $\hat{\lambda}_b \neq 0$ w długim okresie, mamy:

- Jeśli $\lambda_b K$ rośnie szybciej niż $\lambda_a L$, to $\hat{y}(t) \to \hat{\lambda}_a(t)$, $\hat{a}(t) \to \hat{\lambda}_a(t)$ i $\hat{b}(t) \to \hat{\lambda}_b(t) + \frac{\theta}{\alpha-\theta}\hat{k}(t)$ wraz z t. Udział wynagrodzenia kapitału spada do zera.
- Jeśli $\lambda_b K$ rośnie wolniej niż $\lambda_a L$, to $\hat{y}(t) \to \hat{\lambda}_b(t) + \hat{k}(t)$, $\hat{a}(t) \to \hat{\lambda}_a(t) - \frac{\theta}{\alpha-\theta}\hat{k}(t)$ i $\hat{b}(t) \to \hat{\lambda}_b(t)$ wraz z t. Udział wynagrodzenia kapitału wzrasta do jedności.
- Jeśli $\lambda_b K$ rośnie asymptotycznie w tym samym tempie co $\lambda_a L$, to $\hat{y}(t) \to \hat{\lambda}_a(t) = \hat{\lambda}_b(t) + \hat{k}(t)$, $\hat{a}(t) \to \hat{\lambda}_a(t)$ i $\hat{b}(t) \to \hat{\lambda}_b(t)$ wraz z t. Jeśli dodatkowo $\hat{k}(t) = \hat{y}(t)$ w długim okresie, to może to mieć miejsce tylko, gdy $\hat{\lambda}_b(t) \to 0$, co sprowadza się do przypadku LATC omówionego wcześniej. Udział wynagrodzenia kapitału dąży do stałej (pomiędzy 0 a 1).

Plan prezentacji

Przypadek funkcji Cobba–Douglasa

Założenie

Przyjmujemy, że granica możliwości technologicznych przyjmuje tym razem postać

$$H(a,b) = \left(\frac{a}{\lambda_a}\right)^{\alpha} \left(\frac{b}{\lambda_b}\right)^{\beta} = N. \tag{19}$$

Jest to zgodne z założeniem, że jednostkowe produktywności kapitału i pracy mają **niezależne rozkłady Pareto** (Jones, 2005).

Przypadek funkcji Cobba–Douglasa

Założenie

Przyjmujemy, że granica możliwości technologicznych przyjmuje tym razem postać

$$H(a,b) = \left(\frac{a}{\lambda_a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b}{\lambda_b}\right)^{\beta} = N. \tag{19}$$

Jest to zgodne z założeniem, że jednostkowe produktywności kapitału i pracy mają **niezależne rozkłady Pareto** (Jones, 2005).

Twierdzenie

Zagregowana funkcja produkcji spełnia:

$$Y = Y_0 \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{K}{K_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}. \tag{20}$$

Przypadek funkcji Cobba–Douglasa: optymalny wybór technologii

Dla t_0:

- optymalny wybór technologii jest niezdeterminowany, przy założeniu, że

$$\pi_0 = \frac{r_0 K_0}{Y_0} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \tag{21}$$

Przypadek funkcji Cobba–Douglasa: optymalny wybór technologii

Dla t_0:

- optymalny wybór technologii jest niezdeterminowany, przy założeniu, że

$$\pi_0 = \frac{r_0 K_0}{Y_0} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \tag{21}$$

Dla $t \neq t_0$:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^* = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{KL_0}{LK_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \tag{22}$$

$$\left(\frac{b}{b_0}\right)^* = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{a0}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{b0}}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{KL_0}{LK_0}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}. \tag{23}$$

Kierunek postępu technicznego

Jeśli zagregowana funkcja produkcji przyjmuje postać funkcji Cobba–Douglasa, to mamy:

$$\hat{a} = \hat{y} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_b + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\hat{k}, \tag{24}$$

$$\hat{b} = \hat{y} - \hat{k} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_b - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\hat{k}. \tag{25}$$

Kierunek postępu technicznego

Jeśli zagregowana funkcja produkcji przyjmuje postać funkcji Cobba–Douglasa, to mamy:

$$\hat{a} = \hat{y} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_b + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\hat{k}, \tag{24}$$

$$\hat{b} = \hat{y} - \hat{k} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\hat{\lambda}_b - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\hat{k}. \tag{25}$$

Jeśli $\hat{y} = \hat{k}$ (jak ma to miejsce na ścieżce zrównoważonego wzrostu), to mamy **LATC**:

$$\hat{a} = \hat{y} = \hat{k}, \tag{26}$$

$$\hat{b} = \hat{y} - \hat{k} = 0, \tag{27}$$

niezależnie od $\hat{\lambda}_a$ i $\hat{\lambda}_b$.

Plan prezentacji

Model innowacji i sektora B+R

Założenie

Sektory B+R (zwiększające jednostkową produktywność kapitału bądź pracy) złożone są z continuum badaczy na odcinku $I = [0, 1]$. W każdej chwili t, badacz $i \in I$ określa niezależnie jakość swej innowacji ($\tilde{b}_i$ lub $\tilde{a}_i$) jako minimum n niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z dystrybuantą $\mathcal{F}$. Rozkład $\mathcal{F}$ ma dodatnią gęstość w przedziale $[w, v)$, gdzie v może być nieskończone, i zerową gęstość w przeciwnym przypadku. Spełnia on warunek:

$$\lim_{p \to 0_+} \frac{\mathcal{F}(w + px)}{\mathcal{F}(w + p)} = x^\alpha$$

dla wszystkich $x > 0$ i pewnego $\alpha > 0$.

Model innowacji i sektora B+R

Założenie

Sektory B+R (zwiększające jednostkową produktywność kapitału bądź pracy) złożone są z continuum badaczy na odcinku $I = [0, 1]$. W każdej chwili t, badacz $i \in I$ określa niezależnie jakość swej innowacji ($\tilde{b}_i$ lub $\tilde{a}_i$) jako minimum n niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z dystrybuantą $\mathcal{F}$. Rozkład $\mathcal{F}$ ma dodatnią gęstość w przedziale $[w, v)$, gdzie v może być nieskończone, i zerową gęstość w przeciwnym przypadku. Spełnia on warunek:

$$\lim_{p \to 0_+} \frac{\mathcal{F}(w + px)}{\mathcal{F}(w + p)} = x^{\alpha}$$

dla wszystkich $x > 0$ i pewnego $\alpha > 0$.

- Każda technologia składa się z n doskonale komplementarnych składowych (por. Kremer, 1993): efektywność całości jest efektywnością „najsłabszego ogniwa”.

Model innowacji i sektora B+R

Założenie

Sektory B+R (zwiększające jednostkową produktywność kapitału bądź pracy) złożone są z continuum badaczy na odcinku $I = [0, 1]$. W każdej chwili t, badacz $i \in I$ określa niezależnie jakość swej innowacji ($\tilde{b}_i$ lub $\tilde{a}_i$) jako minimum n niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z dystrybuantą $\mathcal{F}$. Rozkład $\mathcal{F}$ ma dodatnią gęstość w przedziale $[w, v)$, gdzie v może być nieskończone, i zerową gęstość w przeciwnym przypadku. Spełnia on warunek:

$$\lim_{p \to 0_+} \frac{\mathcal{F}(w + px)}{\mathcal{F}(w + p)} = x^\alpha$$

dla wszystkich $x > 0$ i pewnego $\alpha > 0$.

- Każda technologia składa się z n doskonale komplementarnych składowych (por. Kremer, 1993): efektywność całości jest efektywnością „najsłabszego ogniwa”.
- Rozkłady produktywności poszczególnych składowych są niezależne oraz ograniczone z dołu.

Kluczowy wynik

Twierdzenie

Gdy $n \to \infty$, minimum n niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie $\mathcal{F}$ zbiega wg rozkładu do rozkładu Weibulla z parametrem kształtu α:

$$\left[1 - \mathcal{F}\left(xp_n + w\right)\right]^n \xrightarrow{d} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha}}, \tag{28}$$

gdzie $w = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(x) > 0\}$, $p_n = \frac{1}{\lambda}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - w\right)$. Zakładamy, że wolny parametr $\lambda > 0$ jest proporcjonalny do średniej z rozkładu $\mathcal{F}$.

Kluczowy wynik

Twierdzenie

Gdy $n \to \infty$, minimum n niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie $\mathcal{F}$ zbiega wg rozkładu do rozkładu Weibulla z parametrem kształtu α:

$$\left[1 - \mathcal{F}\left(xp_n + w\right)\right]^n \xrightarrow{d} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha}}, \tag{28}$$

gdzie $w = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(x) > 0\}$, $p_n = \frac{1}{\lambda}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - w\right)$. *Zakładamy, że wolny parametr* $\lambda > 0$ *jest proporcjonalny do średniej z rozkładu* $\mathcal{F}$.

Dowód: bezpośrednia aplikacja jednowymiarowego wariantu twierdzenia Fishera–Tippetta–Gnedenki o wartościach ekstremalnych.

Kluczowy wynik

Twierdzenie

Gdy $n \to \infty$, minimum n niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie $\mathcal{F}$ zbiega wg rozkładu do rozkładu Weibulla z parametrem kształtu α:

$$\left[1 - \mathcal{F}\left(xp_n + w\right)\right]^n \xrightarrow{d} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}, \tag{28}$$

gdzie $w = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(x) > 0\}$, $p_n = \frac{1}{\lambda}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - w\right)$. Zakładamy, że wolny parametr $\lambda > 0$ jest proporcjonalny do średniej z rozkładu $\mathcal{F}$.

Dowód: bezpośrednia aplikacja jednowymiarowego wariantu twierdzenia Fishera–Tippetta–Gnedenki o wartościach ekstremalnych.

λ_a determinuje średnią $\tilde{a}$, zaś λ_b determinuje średnią $\tilde{b}$:

$$E\tilde{a} = \lambda_a \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \qquad E\tilde{b} = \lambda_b \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{29}$$

gdzie $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ jest funkcją Gamma Eulera.

Przykłady rozkładów

Tablica: Wybrane rozkłady $\mathcal{F}$ takie, że dla $X_1, ..., X_n \sim \mathcal{F}$, $\min\{X_1, ..., X_n\}$ zbiega wg rozkładu do rozkładu Weibulla wraz z $n \to \infty$.

Rozkład	$\mathcal{F}$ dla $x \in [w, v)$	Ogr.dolne	Postulowane p_n	Impl. λ	Impl. α
Pareto(ϕ)	$\mathcal{F}(x) = 1 - \left(\frac{\gamma_X}{x}\right)^{\phi}$	$w = \gamma_X$	$p_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\phi}}$	$\lambda = \gamma_X$	$\alpha = 1$
Jednostajny $U([r, s])$	$\mathcal{F}(x) = \frac{x-r}{s-r}$	$w = r$	$p_n = \frac{1}{n}$	$\lambda = s - r$	$\alpha = 1$
Obcięty $N(\mu, \sigma)$	$\mathcal{F}(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)}$	dane w	$p_n = \bar{p}_n$	$\lambda = \mu$	$\alpha = 1$
Weibull(α, λ)	$\mathcal{F}(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha}}$	$w = 0$	$p_n = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$	dane λ	dane α

Uwagi:

(i) wystarczy wziąć $p_n = \frac{1}{n}$ dla rozkładu Pareto i $p_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$ dla rozkładu Weibulla;
(ii) oznaczono

$$\bar{p}_n = 1 - \frac{w}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu}\Phi^{-1}\left(\left[1 - \Phi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)\right]\frac{1}{n} + \Phi\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)\right).$$

Uzasadnienie założonego kształtu granicy możliwości technologicznych

Wniosek

Jeśli rozkłady $\mathcal{F}$ są ***Pareto, jednostajne bądź obcięte normalne****, wówczas $\alpha = 1$, przez co elastyczność substytucji zagregowanej funkcji CES jest równa $\sigma = \frac{1-\theta}{1-2\theta} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, wzrastając od $\frac{1}{2}$ w przypadku LFP Leontiewa do jedności w przypadku LFP Cobba–Douglasa.*

Uzasadnienie założonego kształtu granicy możliwości technologicznych

Wniosek

Jeśli rozkłady $\mathcal{F}$ są ***Pareto, jednostajne bądź obcięte normalne****, wówczas $\alpha = 1$, przez co elastyczność substytucji zagregowanej funkcji CES jest równa $\sigma = \frac{1-\theta}{1-2\theta} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, wzrastając od $\frac{1}{2}$ w przypadku LFP Leontiewa do jedności w przypadku LFP Cobba–Douglasa.*

Granicę możliwości technologicznych można potraktować jako warstwicę łącznego rozkładu jednostkowych produktywności kapitału i pracy $(\tilde{a}, \tilde{b})$, gdy spełnione jest:

Uzasadnienie założonego kształtu granicy możliwości technologicznych

Wniosek

*Jeśli rozkłady $\mathcal{F}$ są **Pareto, jednostajne bądź obcięte normalne**, wówczas $\alpha = 1$, przez co elastyczność substytucji zagregowanej funkcji CES jest równa $\sigma = \frac{1-\theta}{1-2\theta} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, wzrastając od $\frac{1}{2}$ w przypadku LFP Leontiewa do jedności w przypadku LFP Cobba–Douglasa.*

Granicę możliwości technologicznych można potraktować jako warstwicę łącznego rozkładu jednostkowych produktywności kapitału i pracy $(\tilde{a}, \tilde{b})$, gdy spełnione jest:

Założenie

Każda technologia zwiększająca efektywność kapitału bądź pracy jest dołączana do zbioru możliwości technologicznych, jeśli została potwierdzona przez co najmniej zadany odsetek badaczy w I (z_b i z_a, odpowiednio).

Uzasadnienie założonego kształtu granicy możliwości technologicznych

Wniosek

*Jeśli rozkłady $\mathcal{F}$ są **Pareto, jednostajne bądź obcięte normalne**, wówczas $\alpha = 1$, przez co elastyczność substytucji zagregowanej funkcji CES jest równa $\sigma = \frac{1-\theta}{1-2\theta} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, wzrastając od $\frac{1}{2}$ w przypadku LFP Leontiewa do jedności w przypadku LFP Cobba–Douglasa.*

Granicę możliwości technologicznych można potraktować jako warstwicę łącznego rozkładu jednostkowych produktywności kapitału i pracy $(\tilde{a}, \tilde{b})$, gdy spełnione jest:

Założenie

Każda technologia zwiększająca efektywność kapitału bądź pracy jest dołączana do zbioru możliwości technologicznych, jeśli została potwierdzona przez co najmniej zadany odsetek badaczy w I (z_b i z_a, odpowiednio).

Mamy wtedy $P(\tilde{a} > a, \tilde{b} > b) = P(\tilde{a} > a)P(\tilde{b} > b) \geq z_a z_b \equiv e^{-N}$.

Plan prezentacji

Podsumowanie

- Celem artykułu było sformułowanie mikropodstaw dla znormalizowanej funkcji produkcji CES z postępem technicznym zwiększającym jednostkową produktywność kapitału i pracy.
- Została ona wyprowadzona jako obwiednia LFP przy założeniu, że zbiór możliwości technologicznych jest warstwicą dwuwymiarowego rozkładu Weibulla.

Podsumowanie

- Celem artykułu było sformułowanie mikropodstaw dla znormalizowanej funkcji produkcji CES z postępem technicznym zwiększającym jednostkową produktywność kapitału i pracy.
- Została ona wyprowadzona jako obwiednia LFP przy założeniu, że zbiór możliwości technologicznych jest warstwicą dwuwymiarowego rozkładu Weibulla.
- Normalizacja funkcji CES bardzo pomaga w uzyskaniu przejrzystości i interpretowalności wyników.

Podsumowanie

- Celem artykułu było sformułowanie mikropodstaw dla znormalizowanej funkcji produkcji CES z postępem technicznym zwiększającym jednostkową produktywność kapitału i pracy.
- Została ona wyprowadzona jako obwiednia LFP przy założeniu, że zbiór możliwości technologicznych jest warstwicą dwuwymiarowego rozkładu Weibulla.
- Normalizacja funkcji CES bardzo pomaga w uzyskaniu przejrzystości i interpretowalności wyników.
- Wyprowadzono predykcje odnośnie kierunku postępu technicznego, odróżniając go od kierunku B+R.

Podsumowanie

- Celem artykułu było sformułowanie mikropodstaw dla znormalizowanej funkcji produkcji CES z postępem technicznym zwiększającym jednostkową produktywność kapitału i pracy.
- Została ona wyprowadzona jako obwiednia LFP przy założeniu, że zbiór możliwości technologicznych jest warstwicą dwuwymiarowego rozkładu Weibulla.
- Normalizacja funkcji CES bardzo pomaga w uzyskaniu przejrzystości i interpretowalności wyników.

- Wyprowadzono predykcje odnośnie kierunku postępu technicznego, odróżniając go od kierunku B+R.
- Sformułowano argument teoretyczny potwierdzający zasadność modelowania rozkładów jednostkowych produktywności czynników jako rozkładów Weibulla. Argument ten oparto na fakcie, iż rozkład ten jest rozkładem min–stabilnym.

Podsumowanie

- Celem artykułu było sformułowanie mikropodstaw dla znormalizowanej funkcji produkcji CES z postępem technicznym zwiększającym jednostkową produktywność kapitału i pracy.
- Została ona wyprowadzona jako obwiednia LFP przy założeniu, że zbiór możliwości technologicznych jest warstwicą dwuwymiarowego rozkładu Weibulla.
- Normalizacja funkcji CES bardzo pomaga w uzyskaniu przejrzystości i interpretowalności wyników.

- Wyprowadzono predykcje odnośnie kierunku postępu technicznego, odróżniając go od kierunku B+R.
- Sformułowano argument teoretyczny potwierdzający zasadność modelowania rozkładów jednostkowych produktywności czynników jako rozkładów Weibulla. Argument ten oparto na fakcie, iż rozkład ten jest rozkładem min–stabilnym.

- Wykazano, że model wprost uogólnia się do przypadku n czynników wytwórczych.

Koniec prezentacji

Dziękuję za uwagę.